Autour des fonctions hyperboliques

Partie I – Résolution d'une équation différentielle

1. Résoudre l'équation différentielle : $z' + z\,\mathrm{th}\,t = 0$ où z est une fonction de la variable réelle t à valeurs réelles.
   Trouver la solution z_1 de cette équation telle que $z_1(0) = 1$.
2. Résoudre l'équation différentielle : $z' + z\,\mathrm{th}\,t = t\,\mathrm{th}\,t$.
   Trouver la solution z_2 de cette équation telle que $z_2(0) = 0$.

Partie II – Etude d'un arc paramétré

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la courbe (Γ) représentée paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = t - \mathrm{th}\,t \\ y(t) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}\,t} \end{cases}.$$

3. Démontrer que (Γ) admet un axe de symétrie.
4. Etudier les branches infinies de (Γ).
5. Etudier les variations de x et y ; faire un tableau.
6. Préciser la nature du point A d'abscisse 0, ainsi que la tangente en ce point.

7.a Calculer $\mathrm{ch}\,t$ et $\mathrm{th}\,t$ lorsque $\mathrm{sh}\,t = 1$. Calculer la valeur de t correspondante (on exprimera le résultat sous forme d'un logarithme népérien).

7.b Déterminer le point B de (Γ) où la tangente à pour coefficient directeur -1 ; déterminer une équation cartésienne de la tangente en B à (Γ).

8. Donner l'allure de la courbe (Γ).

9.a Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (Γ) au point M de paramètre t.

9.b Cette tangente recoupe l'axe des abscisses en un point N. Calculer la distance MN.

Partie III – Etude d'intégrales et de suites

Soient un réel x et k un entier strictement positif. On pose $I_k(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^k\,t}$.

10. Calculer $I_1(x)$ (on pourra faire le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$)
11. Calculer $I_2(x)$.

12.a En intégrant par parties, trouver une relation entre I_{k+2} et I_k (on pourra remarquer que $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^k\,t} = \dfrac{\mathrm{ch}\,t}{\mathrm{ch}^{k+1}\,t}$).

12.b En déduire I_3 et I_4.

13. Démontrer que la fonction $I_k : x \mapsto I_k(x)$ est :

13.a impaire.

13.b continue sur $\mathbb{R}$.

13.c de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

14. Calculer I_k', I_k'' et I_k'''.

15. Démontrer que I_k est monotone sur $\mathbb{R}$.

16. On se propose, pour k fixé, d'étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = I_k(n)$.

16.a Démontrer que cette suite est monotone.

16.b Démontrer que, pour tout réel t, $\dfrac{1}{\operatorname{ch} t} \leq 2\mathrm{e}^{-t}$, en déduire que la suite converge.

17. On pose, sous réserve d'existence, $J_k = \lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}^k t}$ notée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}^k t}$.

17.a Démontrer l'existence de J_k.

17.b Calculer J_1 et J_2.

17.c Calculer J_k.